

Ассоциация научно-технических организаций "Уральский профессиональный форум"
Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация
"Современный цифровой колледж при Западно-уральском институте экономики и права"
(АНПОО "СЦК при ЗУИЭП")



ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для проведения промежуточной аттестации
в форме экзамена
по учебному предмету

МАТЕМАТИКА

Общеобразовательного цикла

по специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование
квалификация «Программист»

форма обучения: очно-заочная

Вводится с 01.09.2023

Пермь 2023

РАССМОТРЕНО
на заседании Педагогического совета
протокол от «09» февраля 2023 № 8

Содержание:

1. Паспорт комплекта оценочных средств..... *Ошибка! Закладка не определена.*
2. Лист согласования дополнений и изменений к комплекту КИМ 6
3. Комплект контрольно-измерительных материалов для оценки освоения учебного предмета. 8

1. Паспорт комплекта оценочных средств

Предметом оценки на экзамене являются следующие результаты:

- свободно оперировать понятиями: рациональное число, бесконечная периодическая дробь, проценты, иррациональное число, множества рациональных и действительных чисел, модуль действительного числа; применять дроби и проценты для решения прикладных задач из различных отраслей знаний и реальной жизни; применять приближенные вычисления, правила округления, прикидку и оценку результата вычислений; свободно оперировать понятием: степень с целым показателем, использовать подходящую форму записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных; свободно оперировать понятием: арифметический корень натуральной степени; свободно оперировать понятием: степень с рациональным показателем; свободно оперировать понятиями: логарифм числа, десятичные и натуральные логарифмы; свободно оперировать понятиями: синус, косинус, тангенс, котангенс числового аргумента; оперировать понятиями: арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента. свободно оперировать понятиями: натуральное и целое число, множества натуральных и целых чисел, использовать признаки делимости целых чисел, НОД и НОК натуральных чисел для решения задач, применять алгоритм Евклида свободно оперировать понятием остатка по модулю, записывать натуральные числа в различных позиционных системах счисления; свободно оперировать понятиями: комплексное число и множество комплексных чисел, представлять комплексные числа в алгебраической и тригонометрической форме, выполнять арифметические операции с ними и изображать на координатной плоскости;

- свободно оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство, равносильные уравнения и уравнения-следствия, равносильные неравенства; применять различные методы решения рациональных и дробно-рациональных уравнений, применять метод интервалов для решения неравенств; свободно оперировать понятиями: многочлен от одной переменной, многочлен с целыми коэффициентами, корни многочлена, применять деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу и теорему Виета для решения задач; свободно оперировать понятиями: система линейных уравнений, матрица, определитель матрицы 2×2 и его геометрический смысл, использовать свойства определителя 2×2 для вычисления его значения, применять определители для решения системы линейных уравнений, моделировать реальные ситуации с помощью системы линейных уравнений, исследовать построенные модели с помощью матриц и определителей, интерпретировать полученный результат; использовать свойства действий с корнями для преобразования выражений; выполнять преобразования числовых выражений, содержащих степени с рациональным показателем; использовать свойства логарифмов для преобразования логарифмических выражений; свободно

оперировать понятиями: иррациональные, показательные и логарифмические уравнения, находить их решения с помощью равносильных переходов или осуществляя проверку корней; применять основные тригонометрические формулы для преобразования тригонометрических выражений; свободно оперировать понятием: тригонометрическое уравнение, применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических уравнений; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры. свободно оперировать понятиями: иррациональные, показательные и логарифмические неравенства, находить их решения с помощью равносильных переходов; осуществлять отбор корней при решении тригонометрического уравнения; свободно оперировать понятием тригонометрическое неравенство, применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических неравенств; свободно оперировать понятиями: система и совокупность уравнений и неравенств, равносильные системы и системы-следствия, находить решения системы и совокупностей рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств; решать рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие модули и параметры; применять графические методы для решения уравнений и неравенств, а также задач с параметрами; моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

- свободно оперировать понятиями: функция, способы задания функции, взаимно обратные функции, композиция функций, график функции, выполнять элементарные преобразования графиков функций; свободно оперировать понятиями: область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства свободно оперировать понятиями: четные и нечетные функции, периодические функции, промежутки монотонности функции, максимумы и минимумы функции, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке; свободно оперировать понятиями: степенная функция с натуральным и целым показателем, график степенной функции с натуральным и целым показателем, график корня n -ой степени как функции обратной степени с натуральным показателем; оперировать понятиями: линейная, квадратичная и дробно-линейная функции, выполнять элементарное исследование и построение их графиков; свободно оперировать понятиями: показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики, использовать их графики для решения уравнений; свободно оперировать понятиями: тригонометрическая окружность, определение

тригонометрических функций числового аргумента; использовать графики функций для исследования процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и реальной жизни, выражать формулами зависимости между величинами; строить графики композиции функций с помощью элементарного исследования и свойств композиции двух функций; строить геометрические образы уравнений и неравенств на координатной плоскости; свободно оперировать понятиями: графики тригонометрических функций; применять функции для моделирования и исследования реальных процессов;

- свободно оперировать понятиями: арифметическая и геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, линейный и экспоненциальный рост, формула сложных процентов, иметь представление о константе; использовать прогрессии для решения реальных задач прикладного характера; свободно оперировать понятиями: последовательность, способы задания последовательностей, монотонные и ограниченные последовательности, понимать основы зарождения математического анализа как анализа бесконечно малых; свободно оперировать понятиями: непрерывные функции, точки разрыва графика функции, асимптоты графика функции; свободно оперировать понятием: функция, непрерывная на отрезке, применять свойства непрерывных функций для решения задач; свободно оперировать понятиями: первая и вторая производные функции, касательная к графику функции; вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции двух функций, знать производные элементарных функций; использовать геометрический и физический смысл производной для решения задач. использовать производную для исследования функции на монотонность и экстремумы; находить наибольшее и наименьшее значения функции непрерывной на отрезке; использовать производную для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах, для определения скорости и ускорения процесса, заданного формулой или графиком; свободно оперировать понятиями: первообразная, определенный интеграл, находить первообразные элементарных функций и вычислять интеграл по формуле Ньютона-Лейбница; находить площади плоских фигур и объемы тел с помощью интеграла; иметь представление о математическом моделировании на примере составления дифференциальных уравнений; решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, средствами математического анализа;

- свободно оперировать понятиями: множество, операции над множествами; использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений, при решении задач из других учебных предметов; свободно оперировать понятиями: определение, теорема, уравнение - следствие, свойство математического объекта, доказательство, равносильные уравнения и неравенства;

- свободно оперировать основными понятиями стереометрии при решении задач и проведении математических рассуждений; применять аксиомы стереометрии и следствия из них при решении геометрических задач; классифицировать взаимное расположение прямых в пространстве, плоскостей в пространстве, прямых и плоскостей в пространстве; свободно оперировать понятиями, связанными с углами в пространстве: между прямыми в пространстве, между прямой и плоскостью; свободно оперировать понятиями, связанными с многогранниками; свободно распознавать основные виды многогранников (призма, пирамида, прямоугольный параллелепипед, куб); классифицировать многогранники, выбирая основания для классификации; свободно оперировать понятиями, связанными с сечением многогранников плоскостью; выполнять параллельное, центральное и ортогональное проектирование фигур на плоскость, выполнять изображения фигур на плоскости; строить сечения многогранников различными методами, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объемных фигур: вид сверху, сбоку, снизу; вычислять площади поверхностей многогранников (призма, пирамида), геометрических тел с применением формул; свободно оперировать понятиями: симметрия в пространстве, центр, ось и плоскость симметрии, центр, ось и плоскость симметрии фигуры; свободно оперировать понятиями, соответствующими векторам и координатам в пространстве; выполнять действия над векторами; решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин, применяя известные методы при решении математических задач повышенного и высокого уровня сложности; применять простейшие программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении стереометрических задач; извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках; применять полученные знания на практике: сравнивать и анализировать реальные ситуации, применять изученные понятия в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин; иметь представления об основных этапах развития геометрии как составной части фундамента развития технологий. свободно оперировать понятиями, связанными с цилиндрической, конической и сферической поверхностями, объяснять способы получения; оперировать понятиями, связанными с телами вращения: цилиндром, конусом, сферой и шаром; распознавать тела вращения (цилиндр, конус, сфера и шар) и объяснять способы получения тел вращения; классифицировать взаимное расположение сферы и плоскости; вычислять величины элементов многогранников и тел вращения, объемы и площади поверхностей многогранников и тел вращения,

геометрических тел с применением формул; свободно оперировать понятиями, связанными с комбинациями тел вращения и многогранников: многогранник, вписанный в сферу и описанный около сферы, сфера, вписанная в многогранник или тело вращения, вычислять соотношения между площадями поверхностей и объемами подобных тел; изображать изучаемые фигуры, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объемных фигур: вид сверху, сбоку, снизу, строить сечения тел вращения; извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках; свободно оперировать понятием вектор в пространстве; выполнять операции над векторами; задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат; решать геометрические задачи на вычисление углов между прямыми и плоскостями, вычисление расстояний от точки до плоскости, в целом, на применение векторно-координатного метода при решении; свободно оперировать понятиями, связанными с движением в пространстве, знать свойства движений; выполнять изображения многогранником и тел вращения при параллельном переносе, центральной симметрии, зеркальной симметрии, при повороте вокруг прямой, преобразования подобия; строить сечения многогранников и тел вращения: сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения шара; использовать методы построения сечений: метод следов, метод внутреннего проектирования, метод переноса секущей плоскости; доказывать геометрические утверждения; применять геометрические факты для решения стереометрических задач, предполагающих несколько шагов решения, если условия применения заданы в явной и неявной форме; решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин; применять программные средства и электронно-коммуникационные системы при решении стереометрических задач; применять полученные знания на практике: сравнивать, анализировать и оценивать реальные ситуации, применять изученные понятия, теоремы, свойства в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы, моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин; иметь представления об основных этапах развития геометрии как составной части фундамента развития технологий;

- свободно оперировать понятиями: граф, плоский граф, связный граф, путь в графе, цепь, цикл, дерево, степень вершины, дерево случайного эксперимента; свободно оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт), случайное событие, элементарное случайное событие (элементарный исход) случайного опыта, находить вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными

событиями; находить и формулировать события: пересечение, объединение данных событий, событие, противоположное данному, использовать диаграммы Эйлера, координатную прямую для решения задач, пользоваться формулой сложения вероятностей для вероятностей двух и трех случайных событий; оперировать понятиями: условная вероятность, умножение вероятностей, независимые события, дерево случайного эксперимента, находить вероятности событий с помощью правила умножения, дерева случайного опыта, использовать формулу полной вероятности, формулу Байеса при решении задач, определять независимость событий по формуле и по организации случайного эксперимента; применять изученные комбинаторные формулы для перечисления элементов множеств, элементарных событий случайного опыта, решения задач по теории вероятностей свободно оперировать понятиями: бинарный случайный опыт (испытание), успех и неудача, независимые испытания, серия испытаний, находить вероятности событий: в серии испытаний до первого успеха, в серии испытаний Бернулли, в опыте, связанном со случайным выбором из конечной совокупности; свободно оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, диаграмма распределения, бинарная случайная величина, геометрическое, биномиальное распределение. оперировать понятиями: совместное распределение двух случайных величин, использовать таблицу совместного распределения двух случайных величин для выделения распределения каждой величины, определения независимости случайных величин; свободно оперировать понятием математического ожидания случайной величины (распределения), применять свойства математического ожидания при решении задач, вычислять математическое ожидание биномиального и геометрического распределений; свободно оперировать понятиями: дисперсия, стандартное отклонение случайной величины, применять свойства дисперсии случайной величины (распределения) при решении задач, вычислять дисперсию и стандартное отклонение геометрического и биномиального распределений; вычислять выборочные характеристики по данной выборке и оценивать характеристики генеральной совокупности данных по выборочным характеристикам; оценивать вероятности событий и проверять простейшие статистические гипотезы, пользуясь изученными распределениями.

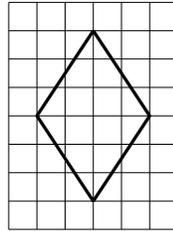
Контроль и оценка на экзамене осуществляются с использованием стандартизированных контрольно-измерительных материалов (КИМ), представленных в форме тестовых заданий, соответствующих материалам ЕГЭ текущего учебного года.

По итогам тестирования выставляется оценка по шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» в соответствии со шкалой перевода:

Процент результативности (правильных ответов)	Количество правильных ответов на вопросы теста	Оценка уровня подготовки	
		балл (отметка)	вербальный аналог
76 - 100	76 - 100	5	отлично
66 - 75	66 - 75	4	хорошо
50 - 65	50 - 65	3	удовлетворительно
Менее 50	Менее 50	2	неудовлетворительно

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки результатов обучения студентов, освоивших программу учебного предмета «**Математика**» и разработаны на основании рабочей программы предмета.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

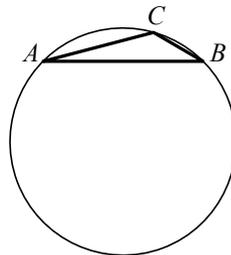
- 4 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,8^\circ\text{C}$, равна $0,83$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_5(8-x) = \log_5 2$.

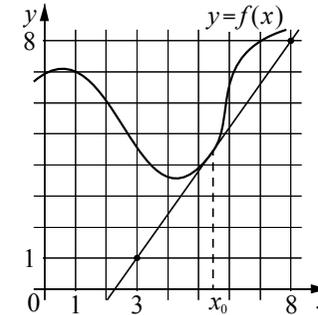
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC сторона AB равна $3\sqrt{2}$, угол C равен 135° . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



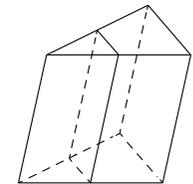
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 5.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{(5\sqrt{6})^2}{10}$.

Ответ: _____.

10

Два тела, массой $m = 9$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 6$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 81 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

11

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй — 25% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 18x + 29$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

15

Решите неравенство $\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x)$.

16

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

- 17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19** В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
- а) Может ли n быть больше 5?
 - б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
 - в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развернутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

-0,8																			
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

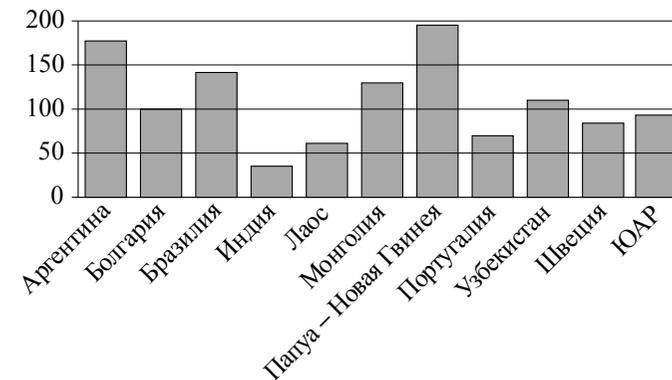
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Шоколадка стоит 30 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 140 рублей в воскресенье?

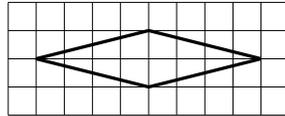
Ответ: _____.

- 2** На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа–Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Болгария?



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: _____.

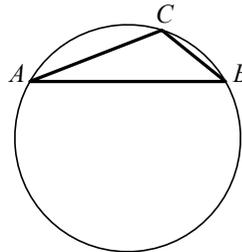
- 4 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,8^\circ\text{C}$, равна $0,91$. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_3(15 - x) = \log_3 7$.

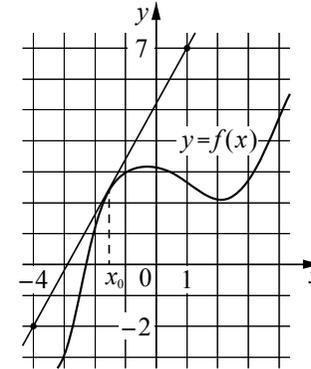
Ответ: _____.

- 6 В треугольнике ABC сторона AB равна $2\sqrt{3}$, угол C равен 120° . Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



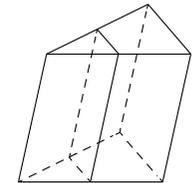
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 7 .



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{(3\sqrt{8})^2}{6}$.

Ответ: _____.

10

Два тела, массой $m = 6$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 9$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 243 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

11

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 45% меди, второй — 20% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

15

Решите неравенство $\log_3 \left((2-x)(x^2+5) \right) \geq \log_3 (x^2-5x+6) + \log_3 (4-x)$.

16

В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.

- 17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2 - a^2}{x^2 + 6x + 9 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19** В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
- а) Может ли n быть больше 6?
 - б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
 - в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	28
2	4
3	12
4	0,17
5	6
6	3
7	1,4
8	20
9	15
10	60
11	30
12	144

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$(2 \cos x + \sqrt{3})(\cos^2 x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos^2 x = -1$, что невозможно, или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда

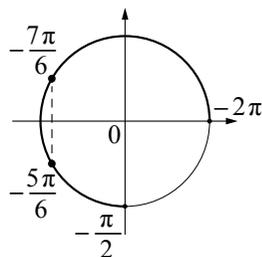
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

Получим числа: $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.



14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC , прямые KL , BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL : LB = SK : KC = DN : NC = AM : MB.$$

Таким образом, прямая LM , лежащая в плоскости α , параллельна прямой SA , а значит, плоскость α параллельна прямой SA .

б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD , искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC . Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC , а прямые SE и EF — прямой AD . Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD , а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

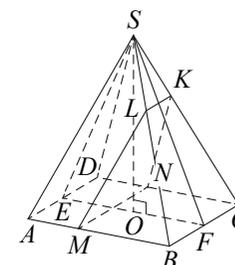
Значит, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF .

Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF , откуда

$$EO = 2, SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 3\sqrt{5};$$

$$\sin \angle ESO = \frac{OE}{SE} = \frac{2\sqrt{5}}{15}; \angle ESF = 2\angle ESO = 2 \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Ответ: б) $2 \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{15}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Решите неравенство $\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5(x^2-7x+12) + \log_5(5-x)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_5((3-x)(x^2+2)) \geq \log_5((3-x)(4-x)) + \log_5(5-x);$$

$$\log_5(3-x) + \log_5(x^2+2) \geq \log_5(3-x) + \log_5(4-x) + \log_5(5-x).$$

Неравенство определено при $x < 3$, поэтому при $x < 3$ неравенство принимает вид:

$$x^2 + 2 \geq (4-x)(5-x); \quad x^2 + 2 \geq x^2 - 9x + 20; \quad 9x \geq 18,$$

откуда $x \geq 2$. Учитывая ограничение $x < 3$, получаем: $2 \leq x < 3$.

Ответ: $[2; 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

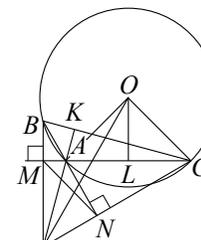
16 В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

Решение.

а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC , поэтому $\angle AMN = \angle CMN = \angle ABC$. Значит, треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AN}{AC} = \cos \angle NAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника AMN , равен $\frac{AO}{2}$.



Точки M и N лежат на окружности диаметром AH , поэтому $AH = AO$.

б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K , а точка L — середина стороны AC , тогда

$$\angle AKB = 90^\circ, \quad \angle AOL = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 2 \angle ABC = \angle ABC = 45^\circ.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \angle OAL &= 90^\circ - \angle AOL = 45^\circ, \quad \angle BAK = 90^\circ - \angle ABC = 45^\circ; \\ \angle OAH &= 180^\circ - \angle OAK = 180^\circ - (\angle BAC - \angle BAK - \angle OAL) = 150^\circ. \end{aligned}$$

Площадь треугольника AHO равна

$$\frac{AO \cdot AH \cdot \sin \angle OAH}{2} = \frac{AO^2 \cdot \sin 150^\circ}{2} = \frac{BC^2 \cdot \sin 150^\circ}{8 \sin^2 120^\circ} = \frac{5}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5; \frac{5(n-1)}{n}; \dots; \frac{5 \cdot 2}{n}; \frac{5}{n}; 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6; \frac{6(n-1)}{n}; \dots; \frac{6 \cdot 2}{n}; \frac{6}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1 + \frac{5}{n}; \frac{(n-1)+5}{n}; \dots; \frac{2+5}{n}; \frac{1+5}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$5 + \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) = 5 + \frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 7,5 млн рублей, поэтому $n = 4$.

Ответ: 4.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $9x^2 - a^2 = 0$, для которых выполнено условие $x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0$.

Поскольку $9x^2 - a^2 = (3x - a)(3x + a)$, уравнение $9x^2 - a^2 = 0$ задаёт на плоскости Oxa пару прямых l_1 и l_2 , заданных уравнениями $a = 3x$ и $a = -3x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a = 0$ и имеет два корня при $a \neq 0$.

Поскольку

$$x^2 + 8x + 16 - a^2 = (x + 4 - a)(x + 4 + a),$$

уравнение $x^2 + 8x + 16 - a^2 = 0$ задаёт пару прямых m_1 и m_2 , заданных уравнениями $a = x + 4$ и $a = -x - 4$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 3x, \\ a = x + 4; \end{cases} \begin{cases} x + 4 = 3x, \\ a = x + 4; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ a = 6. \end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_1 пересекаются в точке $(2; 6)$.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 3x, \\ a = -x - 4; \end{cases} \begin{cases} -x - 4 = 3x, \\ a = -x - 4; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ a = -3. \end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_2 пересекаются в точке $(-1; -3)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = -3x, \\ a = x + 4; \end{cases} \begin{cases} x + 4 = -3x, \\ a = x + 4; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ a = 3. \end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_1 пересекаются в точке $(-1; 3)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = -3x, \\ a = -x - 4; \end{cases} \begin{cases} -x - 4 = -3x, \\ a = -x - 4; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ a = -6. \end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_2 пересекаются в точке $(2; -6)$.

Следовательно, условие $x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0$ выполнено для корней уравнения $9x^2 - a^2 = 0$ при всех a , кроме $a = -6$, $a = -3$, $a = 3$ и $a = 6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a < -6$; $-6 < a < -3$; $-3 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 6$; $a > 6$.

Ответ: $a < -6$; $-6 < a < -3$; $-3 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 6$; $a > 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = 0$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -6$, $a = 0$ и/или $a = 3$, или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -3$, $a = 0$ и/или $a = 6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.

а) Пусть в день с номером k записано k чисел 3 и $12 - 2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $12 + k$. Таким образом, n может быть равным 6.

б) Пусть $n = 4$, в первый день на доску записали число 2 и двенадцать чисел 3, во второй день — двенадцать чисел 4, в третий день — шесть чисел 4 и пять чисел 5, а в четвёртый день — десять чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 38, во второй — 48, в третий — 49, а в четвёртый — 50. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $2\frac{12}{13} < 3$, а среднее

арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{1}{46} > 4$.

в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 6 чисел. Значит, если $n > 5$, то в шестой день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 6. Таким образом, $n \leq 5$.

Если $n = 5$, то в пятый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в четвёртый, третий и второй дни, не превосходят 9, 8 и 7 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 40.

Если $n = 4$, то в четвёртый день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 14 и 13 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 48.

Если $n = 3$, то в третий день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 19, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 45.

Если $n = 2$, то во второй день на доску было записано не более пяти чисел, а их сумма не превосходит 25. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 31.

Если $n = 1$, то сумма всех записанных чисел равна 6.

Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 48.

Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 48. Пусть $n = 4$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 2, 2, 3, 3, 3; в третий — 3, 3, 4, 4; в четвёртый — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных в эти дни чисел соответственно равны 6, 13, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 48.

Ответ: а) да; б) да; в) 48.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	5
2	6
3	8
4	0,09
5	8
6	2
7	1,8
8	28
9	12
10	90
11	50
12	196

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$(2 \cos x - 1)(\cos^2 x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos^2 x = -1$, что невозможно, или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$,

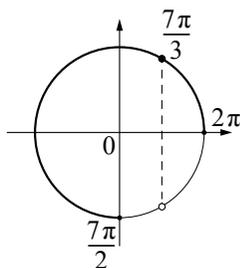
$$n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим число $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{7\pi}{3}$.



14

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC , прямые KL , BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL : LB = SK : KC = DN : NC = AM : MB.$$

Таким образом, прямая LM , лежащая в плоскости α , параллельна прямой SA , а значит, плоскость α параллельна прямой SA .

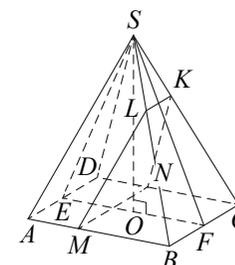
б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD , искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC . Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC , а прямые SE и EF — прямой AD . Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD , а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

Таким образом, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF . Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF , откуда

$$EO = 3, SE = \sqrt{SA^2 - \frac{AD^2}{4}} = 2\sqrt{10};$$

$$\sin \angle ESO = \frac{OE}{SE} = \frac{3\sqrt{10}}{20}; \angle ESF = 2\angle ESO = 2 \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Ответ: б) $2 \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{20}$.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно, с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

15 Решите неравенство $\log_3((2-x)(x^2+5)) \geq \log_3(x^2-5x+6) + \log_3(4-x)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3((2-x)(x^2+5)) \geq \log_3((2-x)(3-x)) + \log_3(4-x);$$

$$\log_3(2-x) + \log_3(x^2+5) \geq \log_3(2-x) + \log_3(3-x) + \log_3(4-x).$$

Неравенство определено при $x < 2$, поэтому при $x < 2$ неравенство принимает вид:

$$x^2 + 5 \geq (3-x)(4-x); x^2 + 5 \geq x^2 - 7x + 12; 7x \geq 7,$$

откуда $x \geq 1$. Учитывая ограничение $x < 2$, получаем: $1 \leq x < 2$.

Ответ: $[1; 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

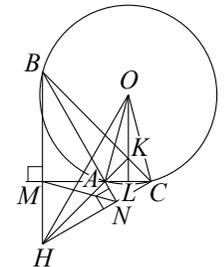
16 В треугольнике ABC угол A равен 120° . Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC , пересекаются в точке H . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO , если $BC = 3$, $\angle ABC = 15^\circ$.

Решение.

а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC , поэтому $\angle AMN = \angle CMN = \angle ABC$. Значит, треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AN}{AC} = \cos \angle NAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника AMN , равен $\frac{AO}{2}$.



Точки M и N лежат на окружности диаметром AH , поэтому $AH = AO$.

б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K , а точка L — середина стороны AC , тогда

$$\angle AKB = 90^\circ, \angle AOL = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cdot 2 \angle ABC = \angle ABC = 15^\circ.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \angle OAL &= 90^\circ - \angle AOL = 75^\circ, \angle BAK = 90^\circ - \angle ABC = 75^\circ; \\ \angle OAH &= 180^\circ - \angle OAK = 180^\circ - (\angle BAK + \angle OAL - \angle BAC) = 150^\circ. \end{aligned}$$

Площадь треугольника AHO равна

$$\frac{AO \cdot AH \cdot \sin \angle OAH}{2} = \frac{AO^2 \cdot \sin 150^\circ}{2} = \frac{BC^2 \cdot \sin 150^\circ}{8 \sin^2 120^\circ} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

- 17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10; \frac{10(n-1)}{n}; \dots; \frac{10 \cdot 2}{n}; \frac{10}{n}; 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$11; \frac{11(n-1)}{n}; \dots; \frac{11 \cdot 2}{n}; \frac{11}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1 + \frac{10}{n}; \frac{(n-1)+10}{n}; \dots; \frac{2+10}{n}; \frac{1+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10 + \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) = 10 + \frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 15 млн рублей, поэтому $n = 9$.

Ответ: 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2 - a^2}{x^2 + 6x + 9 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $4x^2 - a^2 = 0$, для которых выполнено условие $x^2 + 6x + 9 - a^2 \neq 0$.

Поскольку $4x^2 - a^2 = (2x - a)(2x + a)$, уравнение $4x^2 - a^2 = 0$ задаёт на плоскости Oxa пару прямых l_1 и l_2 , заданных уравнениями $a = 2x$ и $a = -2x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a = 0$ и имеет два корня при $a \neq 0$.

Поскольку

$$x^2 + 6x + 9 - a^2 = (x + 3 - a)(x + 3 + a),$$

уравнение $x^2 + 6x + 9 - a^2 = 0$ задаёт пару прямых m_1 и m_2 , заданных уравнениями $a = x + 3$ и $a = -x - 3$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 2x, & \begin{cases} x + 3 = 2x, & \begin{cases} x = 3, \\ a = x + 3; \end{cases} \\ a = x + 3; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} a = 6. \end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_1 пересекаются в точке $(3; 6)$.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 2x, & \begin{cases} -x - 3 = 2x, & \begin{cases} x = -1, \\ a = -x - 3; \end{cases} \\ a = -x - 3; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} a = -2. \end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_2 пересекаются в точке $(-1; -2)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = -2x, & \begin{cases} x + 3 = -2x, & \begin{cases} x = -1, \\ a = x + 3; \end{cases} \\ a = x + 3; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} a = 2. \end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_1 пересекаются в точке $(-1; 2)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a = -2x, & \begin{cases} -x - 3 = -2x, & \begin{cases} x = 3, \\ a = -x - 3; \end{cases} \\ a = -x - 3; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} a = -6. \end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_2 пересекаются в точке $(3; -6)$.

Следовательно, условие $x^2 + 6x + 9 - a^2 \neq 0$ выполнено для корней уравнения $4x^2 - a^2 = 0$ при всех a , кроме $a = -6$, $a = -2$, $a = 2$ и $a = 6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a < -6$; $-6 < a < -2$; $-2 < a < 0$; $0 < a < 2$; $2 < a < 6$; $a > 6$.

Ответ: $a < -6$; $-6 < a < -2$; $-2 < a < 0$; $0 < a < 2$; $2 < a < 6$; $a > 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точки $a = 0$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -6$, $a = 0$ и/или $a = 2$, или множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -2$, $a = 0$ и/или $a = 6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.

а) Пусть в день с номером k записано k чисел 3 и $14 - 2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $14 + k$. Таким образом, n может быть равным 7.

б) Пусть $n = 4$, в первый день на доску записали число 1 и 32 числа 2, во второй день — 12 чисел 4 и 20 чисел 5, в третий день — 6 чисел 4 и 25 чисел 5, а в четвёртый день — 30 чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 65, во второй — 148, в третий — 149, а в четвёртый — 150. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $1\frac{32}{33} < 2$, а среднее

арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{4}{63} > 4$.

в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 5 чисел. Значит, если $n > 4$, то в пятый день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 5. Таким образом, $n \leq 4$.

Если $n = 4$, то в четвёртый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 9 и 8 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 32.

Если $n = 3$, то в третий день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 14, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 34.

Если $n = 2$, то во второй день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 25.

Если $n = 1$, то сумма всех записанных чисел равна 5.

Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 34.

Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 34. Пусть $n = 3$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 3, 3, 4, 4; в третий — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных за эти дни чисел соответственно

равны 5, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 34.

Ответ: а) да; б) да; в) 34.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта a ; — обоснованное решение пункта b ; — искомая оценка в пункте b ; — пример в пункте b , обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	4