Ассоциация научно-технических организаций "Уральский профессиональный форум"
Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация
"Современный цифровой колледж при Западно-уральском институте экономики и права"
(АНПОО "СЦК при ЗУИЭП")

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_______________/Лобанова И.И.
«06» июня 2022 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
для проведения промежуточной аттестации
в форме экзамена
по учебному предмету

МАТЕМАТИКА

Общеобразовательного цикла

по специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование
квалификация «Программист»

форма обучения: очно-заочная

Вводится с 01.09.2022г.

Пермь 2022

РАССМОТРЕНО
на заседании Педагогического совета
протокол от «03» июня 2022 г. № 2.

Содержание:

1.Паспорт комплекта оценочных средств

Предметом оценки на экзамене являются следующие результаты:

ПР1б сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

ПР2б сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

ПР3б владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

ПР4б владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

ПР5б сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

ПР6б владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

ПР7б сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

ПР8б владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач;

ПР1у.сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

ПР2у.сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

ПР3у.сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

ПР4у.сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

ПР5у.владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

Контроль и оценка на экзамене осуществляются с использованием стандартизированных контрольно-измерительных материалов (КИМ), представленных в форме **тестовых заданий,** соответствующих материалам ЕГЭ текущего учебного года.

По итогам тестирования выставляется оценка по шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» в соответствии со шкалой перевода:

Процент результативности (правильных ответов)	Количество правильных ответов на вопросы теста	Оценка уровня подготовки	
		балл (отметка)	вербальный аналог
76 - 100	76 - 100	5	отлично
66 - 75	66 - 75	4	хорошо
50 - 65	50 - 65	3	удовлетворительно
Менее 50	Менее 50	2	неудовлетворительно

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки результатов обучения студентов, освоивших программу учебного предмета **«Математика»** и разработаны на основании рабочей программы предмета.

Контрольно-измерительные материалы вводятся в действие с «01» сентября 2022г.

2. ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ ДОПОЛНЕНИЙ И ИЗМЕНЕНИЙ К КОМПЛЕКТУ КИМ

В комплект КИМ внесены следующие изменения:

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Дополнения и изменения в комплекте КИМ обсуждены на заседании ЦМК ____

«_____» _____________ 20_____г. (протокол № ________).

Председатель ЦМК _______________________/____________________/

Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. | - | 0 | , | 8 | Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

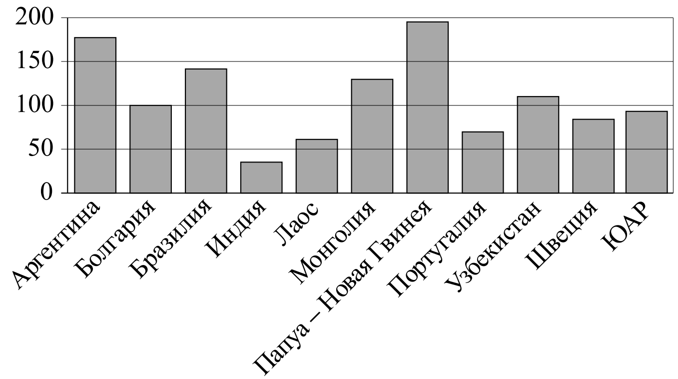
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Шоколадка стоит 25 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 480 рублей в воскресенье?

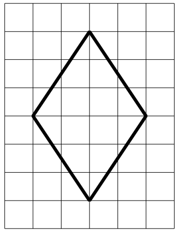
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа–Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Монголия?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

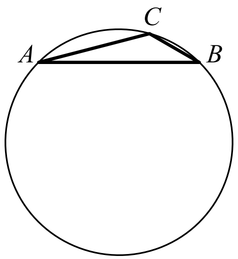
4 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8℃, равна 0,83. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8℃ или выше.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_5(8-x)=\log_5 2$.

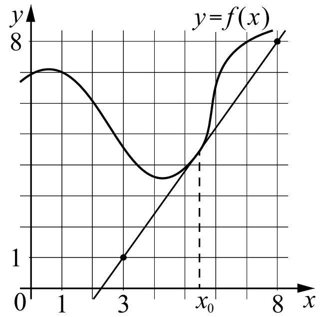
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC сторона AB равна $3\sqrt{2}$, угол C равен $135°$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



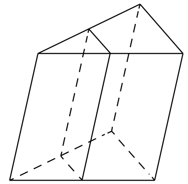
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 5.



Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{\left(5\sqrt{6}\right)^2}{10}$.

Ответ: ___________________________.

10 Два тела, массой $m=9$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v=6$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 81 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй — 25% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-18x+29$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

15 Решите неравенство $\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right)\geq\log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$.

16 В треугольнике ABC угол A равен 120°. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что $AH=AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC=\sqrt{15}$, $\angle ABC=45^\circ$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8.

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

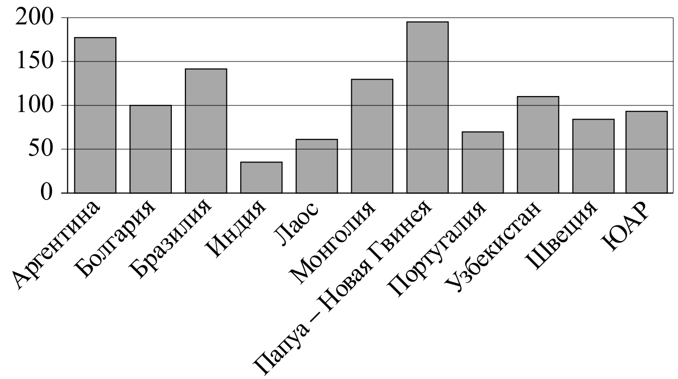
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1 Шоколадка стоит 30 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 140 рублей в воскресенье?

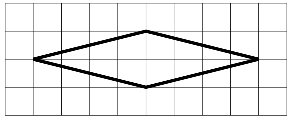
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа–Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Болгария?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

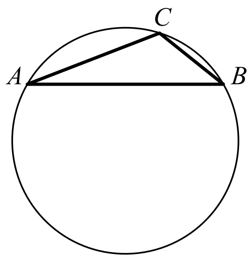
4 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8℃, равна 0,91. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8℃ или выше.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(15-x)=\log_3 7$.

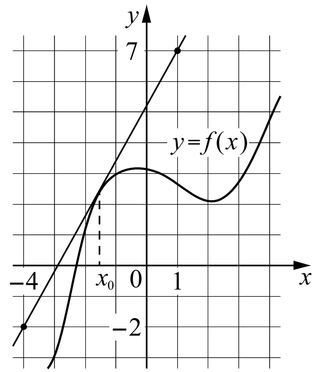
Ответ: ___________________________.

6 В треугольнике ABC сторона AB равна $2\sqrt{3}$, угол C равен 120°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.



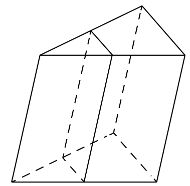
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 7.



Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(3\sqrt{8}\right)^2}{6}$.

Ответ: ___________________________.

10 Два тела, массой $m = 6$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 9$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2\alpha$, где m — масса (в кг), v — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 243 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 45% меди, второй — 20% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

15 Решите неравенство $\log_3\left((2-x)\left(x^2+5\right)\right) \geq \log_3\left(x^2 - 5x + 6\right) + \log_3(4-x)$.

16 В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = 3$, $\angle ABC = 15°$.

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 6?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Открытый вариант 2

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	28
2	4
3	12
4	0,17
5	6
6	3
7	1,4
8	20
9	15
10	60
11	30
12	144

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

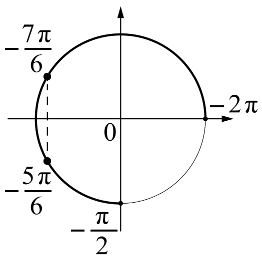
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(\cos^2 x+1\right)=0.$$

Значит, или $\cos^2 x=-1$, что невозможно, или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

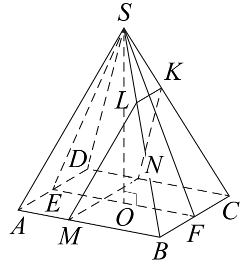
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC, прямые KL, BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL:LB=SK:KC=DN:NC=AM:MB.$$

Таким образом, прямая LM, лежащая в плоскости α, параллельна прямой SA, а значит, плоскость α параллельна прямой SA.

б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD, искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC. Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC, а прямые SE и EF — прямой AD. Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD, а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

Значит, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF.

Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF, откуда

$$EO=2,\ SE=\sqrt{SA^2-\frac{AD^2}{4}}=3\sqrt{5};$$

$$\sin\angle ESO=\frac{OE}{SE}=\frac{2\sqrt{5}}{15};\ \angle ESF=2\angle ESO=2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Ответ: б) $2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \ge \log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right) \ge \log_5\left((3-x)(4-x)\right)+\log_5(5-x);$$

$$\log_5(3-x)+\log_5\left(x^2+2\right) \ge \log_5(3-x)+\log_5(4-x)+\log_5(5-x).$$

Неравенство определено при $x<3$, поэтому при $x<3$ неравенство принимает вид:

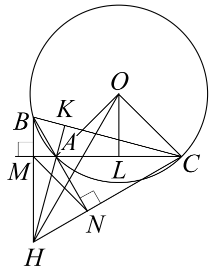
$$x^2+2 \ge (4-x)(5-x);\ x^2+2 \ge x^2-9x+20;\ 9x \ge 18,$$

откуда $x \ge 2$. Учитывая ограничение $x<3$, получаем: $2 \le x < 3$.
Ответ: $[2; 3)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.

Решение.
а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC, поэтому $\angle AMN = \angle CMN = \angle ABC$. Значит, треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AN}{AC} = \cos\angle NAC = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника AMN, равен $\frac{AO}{2}$.



Точки M и N лежат на окружности диаметром AH, поэтому $AH = AO$.
б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K, а точка L — середина стороны AC, тогда

$$\angle AKB = 90°,\ \angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cdot 2\angle ABC = \angle ABC = 45°.$$

Значит,

$$\angle OAL = 90° - \angle AOL = 45°,\ \angle BAK = 90° - \angle ABC = 45°;$$

$$\angle OAH = 180° - \angle OAK = 180° - \left(\angle BAC - \angle BAK - \angle OAL\right) = 150°.$$

Площадь треугольника AHO равна

$$\frac{AO\cdot AH\cdot \sin\angle OAH}{2} = \frac{AO^2\cdot \sin 150°}{2} = \frac{BC^2\cdot \sin 150°}{8\sin^2 120°} = \frac{5}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5;\ \frac{5(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{5\cdot 2}{n};\ \frac{5}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6;\ \frac{6(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{6\cdot 2}{n};\ \frac{6}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1+\frac{5}{n};\ \frac{(n-1)+5}{n};\ \ldots;\ \frac{2+5}{n};\ \frac{1+5}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$5+\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=5+\frac{n+1}{2}\ \text{(млн рублей)}.$$

Общая сумма выплат равна 7,5 млн рублей, поэтому $n=4$.
Ответ: 4.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $9x^2-a^2=0$, для которых выполнено условие $x^2+8x+16-a^2\neq 0$.

Поскольку $9x^2-a^2=(3x-a)(3x+a)$, уравнение $9x^2-a^2=0$ задаёт на плоскости Oxa пару прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $a=3x$ и $a=-3x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a=0$ и имеет два корня при $a\neq 0$.

Поскольку

$$x^2+8x+16-a^2=(x+4-a)(x+4+a),$$

уравнение $x^2+8x+16-a^2=0$ задаёт пару прямых m_1 и m_2, заданных уравнениями $a=x+4$ и $a=-x-4$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x+4=3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\a=6.\end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_1 пересекаются в точке $(2;6)$.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}-x-4=3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\a=-3.\end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_2 пересекаются в точке $(-1;-3)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x+4=-3x,\\a=x+4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\a=3.\end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_1 пересекаются в точке $(-1;3)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}-x-4=-3x,\\a=-x-4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\a=-6.\end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_2 пересекаются в точке $(2;-6)$.

Следовательно, условие $x^2+8x+16-a^2\neq 0$ выполнено для корней уравнения $9x^2-a^2=0$ при всех a, кроме $a=-6$, $a=-3$, $a=3$ и $a=6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-6$; $-6<a<-3$; $-3<a<0$; $0<a<3$; $3<a<6$; $a>6$.

Ответ: $a<-6$; $-6<a<-3$; $-3<a<0$; $0<a<3$; $3<a<6$; $a>6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=0$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-6$, $a=0$ и/или $a=3$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-3$, $a=0$ и/или $a=6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли n быть больше 5?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.

а) Пусть в день с номером k записано k чисел 3 и $12-2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $12+k$. Таким образом, n может быть равным 6.

б) Пусть $n=4$, в первый день на доску записали число 2 и двенадцать чисел 3, во второй день — двенадцать чисел 4, в третий день — шесть чисел 4 и пять чисел 5, а в четвёртый день — десять чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 38, во второй — 48, в третий — 49, а в четвёртый — 50. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $2\frac{12}{13}<3$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{1}{46}>4$.

в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 6 чисел. Значит, если $n>5$, то в шестой день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 6. Таким образом, $n\le 5$.

Если $n=5$, то в пятый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в четвёртый, третий и второй дни, не превосходят 9, 8 и 7 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 40.

Если $n=4$, то в четвёртый день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 14 и 13 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 48.

Если $n=3$, то в третий день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 19, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 45.

Если $n=2$, то во второй день на доску было записано не более пяти чисел, а их сумма не превосходит 25. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 31.

Если $n=1$, то сумма всех записанных чисел равна 6.

Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 48.

Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 48. Пусть $n=4$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 2, 2, 3, 3, 3; в третий — 3, 3, 4, 4; в четвёртый — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных в эти дни чисел соответственно равны 6, 13, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 48.

Ответ: а) да; б) да; в) 48.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Ответы к заданиям

№ задания	Ответ
1	5
2	6
3	8
4	0,09
5	8
6	2
7	1,8
8	28
9	12
10	90
11	50
12	196

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x-1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

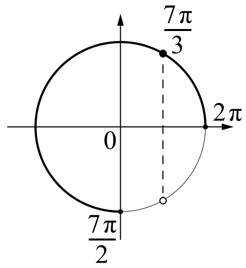
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$(2\cos x-1)\left(\cos^2 x+1\right)=0.$$

Значит, или $\cos^2 x=-1$, что невозможно, или $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим число $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{3}$.

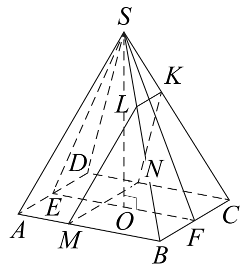
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:2$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



а) Пусть плоскость α пересекает прямые SB и AB в точках L и M соответственно. Поскольку плоскость α параллельна прямой BC, прямые KL, BC и MN параллельны. Следовательно,

$$SL:LB=SK:KC=DN:NC=AM:MB.$$

Таким образом, прямая LM, лежащая в плоскости α, параллельна прямой SA, а значит, плоскость α параллельна прямой SA.

б) Поскольку плоскость α параллельна плоскости SAD, искомый угол равен углу между плоскостями SAD и SBC. Пусть точки E и F — середины рёбер AD и BC соответственно. Тогда прямые SF и EF перпендикулярны прямой BC, а прямые SE и EF — прямой AD. Таким образом, плоскость SEF перпендикулярна прямым BC и AD, а также содержащим их плоскостям SBC и SAD соответственно.

Таким образом, угол между плоскостями α и SBC равен углу ESF.

Высота SO пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости SEF, откуда

$$EO=3,\ SE=\sqrt{SA^2-\frac{AD^2}{4}}=2\sqrt{10};$$

$$\sin\angle ESO=\frac{OE}{SE}=\frac{3\sqrt{10}}{20};\ \angle ESF=2\angle ESO=2\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Ответ: б) $2\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_3\left((2-x)\left(x^2+5\right)\right)\geq \log_3\left(x^2-5x+6\right)+\log_3(4-x)$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3\left((2-x)\left(x^2+5\right)\right)\geq \log_3\left((2-x)(3-x)\right)+\log_3(4-x);$$

$$\log_3(2-x)+\log_3\left(x^2+5\right)\geq \log_3(2-x)+\log_3(3-x)+\log_3(4-x).$$

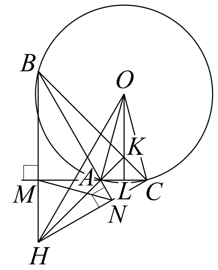
Неравенство определено при $x<2$, поэтому при $x<2$ неравенство принимает вид:

$$x^2+5\geq(3-x)(4-x);\ x^2+5\geq x^2-7x+12;\ 7x\geq 7,$$

откуда $x\geq 1$. Учитывая ограничение $x<2$, получаем: $1\leq x<2$.
Ответ: $[1;2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что $AH=AO$.
б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC=3$, $\angle ABC=15°$.



Решение.
а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC, поэтому $\angle AMN=\angle CMN=\angle ABC$. Значит, треугольники AMN и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AN}{AC}=\cos\angle NAC=\cos 60°=\frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника AMN, равен $\frac{AO}{2}$.
Точки M и N лежат на окружности диаметром AH, поэтому $AH=AO$.
б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K, а точка L — середина стороны AC, тогда

$$\angle AKB=90°,\ \angle AOL=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot 2\angle ABC=\angle ABC=15°.$$

Значит,

$$\angle OAL=90°-\angle AOL=75°,\ \angle BAK=90°-\angle ABC=75°;$$

$$\angle OAH=180°-\angle OAK=180°-\left(\angle BAK+\angle OAL-\angle BAC\right)=150°.$$

Площадь треугольника AHO равна

$$\frac{AO\cdot AH\cdot\sin\angle OAH}{2}=\frac{AO^2\cdot\sin 150°}{2}=\frac{BC^2\cdot\sin 150°}{8\sin^2 120°}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10;\ \frac{10(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{10\cdot 2}{n};\ \frac{10}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$11;\ \frac{11(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{11\cdot 2}{n};\ \frac{11}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1+\frac{10}{n};\ \frac{(n-1)+10}{n};\ \ldots;\ \frac{2+10}{n};\ \frac{1+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=10+\frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 15 млн рублей, поэтому $n=9$.

Ответ: 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $4x^2-a^2=0$, для которых выполнено условие $x^2+6x+9-a^2\neq 0$.

Поскольку $4x^2-a^2=(2x-a)(2x+a)$, уравнение $4x^2-a^2=0$ задаёт на плоскости Oxa пару прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $a=2x$ и $a=-2x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a=0$ и имеет два корня при $a\neq 0$.

Поскольку

$$x^2+6x+9-a^2=(x+3-a)(x+3+a),$$

уравнение $x^2+6x+9-a^2=0$ задаёт пару прямых m_1 и m_2, заданных уравнениями $a=x+3$ и $a=-x-3$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x+3=2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ a=6.\end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_1 пересекаются в точке $(3;6)$.

Координаты точки пересечения прямых l_1 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-x-3=2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ a=-2.\end{cases}$$

Значит, прямые l_1 и m_2 пересекаются в точке $(-1;-2)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_1 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x+3=-2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ a=2.\end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_1 пересекаются в точке $(-1;2)$.

Координаты точки пересечения прямых l_2 и m_2 являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-x-3=-2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ a=-6.\end{cases}$$

Значит, прямые l_2 и m_2 пересекаются в точке $(3;-6)$.

Следовательно, условие $x^2+6x+9-a^2\neq 0$ выполнено для корней уравнения $4x^2-a^2=0$ при всех a, кроме $a=-6$, $a=-2$, $a=2$ и $a=6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<2$; $2<a<6$; $a>6$.

Ответ: $a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<2$; $2<a<6$; $a>6$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=0$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-6$, $a=0$ и/или $a=2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-2$, $a=0$ и/или $a=6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 6?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.
а) Пусть в день с номером k записано k чисел 3 и $14-2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $14+k$. Таким образом, n может быть равным 7.
б) Пусть $n=4$, в первый день на доску записали число 1 и 32 числа 2, во второй день — 12 чисел 4 и 20 чисел 5, в третий день — 6 чисел 4 и 25 чисел 5, а в четвёртый день — 30 чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 65, во второй — 148, в третий — 149, а в четвёртый — 150. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $1\frac{32}{33}<2$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{4}{63}>4$.
в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 5 чисел. Значит, если $n>4$, то в пятый день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 5. Таким образом, $n\le 4$.
Если $n=4$, то в четвёртый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 9 и 8 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 32.
Если $n=3$, то в третий день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 14, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 34.
Если $n=2$, то во второй день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 25.
Если $n=1$, то сумма всех записанных чисел равна 5.
Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 34.
Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 34. Пусть $n=3$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 3, 3, 4, 4; в третий — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных за эти дни чисел соответственно

равны 5, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 34.
Ответ: а) да; б) да; в) 34.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4