Ассоциация научно-технических организаций "Уральский профессиональный форум"
Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация
"Современный цифровой колледж при Западно-Уральском институте экономики и права"
(АНПОО "СЦК при ЗУИЭП")

«Утверждаю»
Директор АНПОО "СЦК при ЗУИЭП"

______________/И.И. Лобанова/

«20» апреля 2023 г.
МП

**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА**
**для проведения промежуточной аттестации**
**в форме экзамена**
*по учебному предмету*

**МАТЕМАТИКА**

Общеобразовательного цикла
по профессии
09.01.03 Оператор информационных систем и ресурсов
квалификация «Оператор информационных систем и ресурсов»

форма обучения: очная

Пермь, 2023

Рекомендовано к утверждению
на заседании Педагогического совета
АНПОО "СЦК при ЗУИЭП",

протокол № 9 от «07» апреля 2023 г.

**Содержание:**

# 1.ПАСПОРТ КОМПЛЕКТА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Предметом оценки на экзамене являются следующие результаты:

Контроль и оценка на экзамене осуществляются с использованием стандартизированных контрольно-измерительных материалов (КИМ), представленных в форме **тестовых заданий,** соответствующих материалам ЕГЭ текущего учебного года.

| **Код ПР соответствующей предметной области** | **Результаты освоения дисциплины включают:** |
|---|---|
| ПР1у. | умение оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; |
| ПР2у. | умение оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений и при решении задач, в том числе из других учебных предметов; |
| ПР3у. | умение оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач; |
| ПР4у. | умение свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач; |
| ПР5у. | умение оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления; |
| ПР6у. | умение свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа; |
| ПР7у. | умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни; |
| ПР8у. | умение свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; |

| | |
|---|---|
| | умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем; |
| ПР9у. | умение свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул; |
| ПР10у. | умение оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений; |
| ПР11у. | умение оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел; |
| ПР12у. | умение свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии; |
| ПР13у. | умение находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; |
| ПР14у. | умение свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между |

| | |
|---|---|
| | прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения; |
| ПР15у. | умение свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур; |
| ПР16у. | умение свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; |
| ПР17у. | умение свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица 2x2 и 3x3, определитель матрицы, геометрический смысл определителя; |
| ПР18у. | умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера; |
| ПР19у. | умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки. |

По итогам тестирования выставляется оценка по шкале: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно» в соответствии со шкалой перевода:

| Процент результативности (правильных ответов) | Количество правильных ответов на вопросы теста | Оценка уровня подготовки | |
|---|---|---|---|
| | | балл (отметка) | вербальный аналог |
| 76 - 100 | 76 - 100 | 5 | отлично |
| 66 - 75 | 66 - 75 | 4 | хорошо |
| 50 - 65 | 50 - 65 | 3 | удовлетворительно |
| Менее 50 | Менее 50 | 2 | неудовлетворительно |

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки результатов обучения студентов, освоивших программу учебного предмета **«Математика»** и разработаны на основании рабочей программы предмета.

Контрольно-измерительные материалы вводятся в действие с «01» сентября 2023г.

## 2. ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ ДОПОЛНЕНИЙ И ИЗМЕНЕНИЙ К КОМПЛЕКТУ КИМ НА 2023/2024 УЧЕБНЫЙ ГОД УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА»

В комплект КИМ внесены следующие изменения:

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

________________________________________________________________________________

Дополнения и изменения в комплекте КИМ обсуждены на заседании ЦМК
_________________________________________________________________________

«_____» _____________ 20_____г. (протокол № _______ ).

Председатель ЦМК _____________________/___________________/

# Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

## Профильный уровень

## Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. | -0,8 | Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

***Желаем успеха!***

**Справочные материалы**

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$



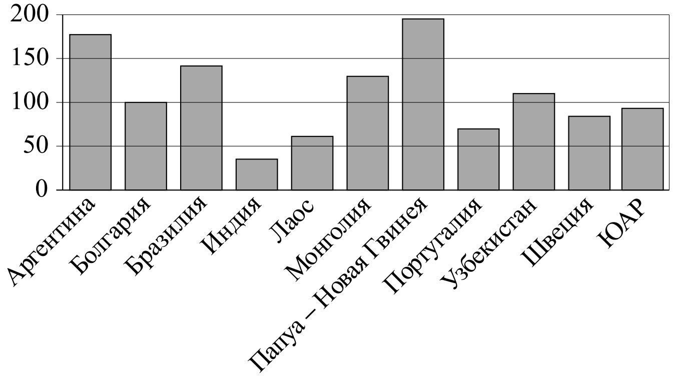
***Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.***

## Часть 1

**1** Шоколадка стоит 25 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 480 рублей в воскресенье?

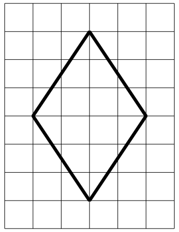
Ответ: ___________________________.

**2** На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа–Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Монголия?




Ответ: ___________________________.

**3** На клетчатой бумаге с размером клетки $1\times1$ изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

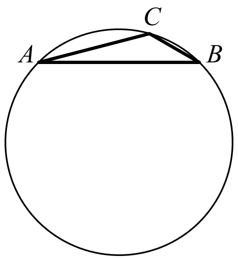
**4** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8℃, равна 0,83. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8℃ или выше.

Ответ: ___________________________.

**5** Найдите корень уравнения $\log_5(8-x)=\log_5 2$.

Ответ: ___________________________.

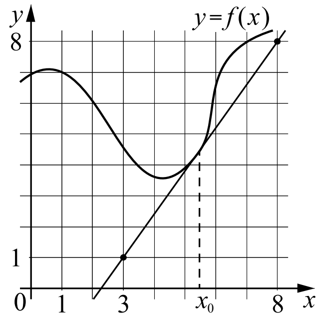
**6** В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ равна $3\sqrt{2}$, угол $C$ равен 135°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.




Ответ: ___________________________.

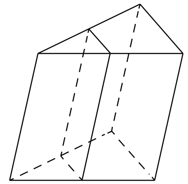


**7** На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




Ответ: ___________________________.

**8** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 5.



Ответ: ___________________________.

***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.***

## Часть 2

**9** Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5\sqrt{6}\right)^2}{10}$.

Ответ: ___________________________.

**10** Два тела, массой $m=9$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v=6$ м/с под углом $2\alpha$ друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q=mv^2\sin^2\alpha$, где $m$ — масса (в кг), $v$ — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом $2\alpha$ должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 81 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

**11** Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй — 25% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

**12** Найдите точку минимума функции $y=x^{\frac{3}{2}}-18x+29$.

Ответ: ___________________________.

***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.***



***Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.***

**13** а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

**14** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB$ равна 4, а боковое ребро $SA$ равно 7. На рёбрах $CD$ и $SC$ отмечены точки $N$ и $K$ соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость $\alpha$ содержит прямую $KN$ и параллельна прямой $BC$.
а) Докажите, что плоскость $\alpha$ параллельна прямой $SA$.
б) Найдите угол между плоскостями $\alpha$ и $SBC$.

**15** Решите неравенство $\log_5\left(\left(3-x\right)\left(x^2+2\right)\right)\ge\log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5\left(5-x\right)$.

**16** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $120°$. Прямые, содержащие высоты $BM$ и $CN$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.
а) Докажите, что $AH=AO$.
б) Найдите площадь треугольника $AHO$, если $BC=\sqrt{15}$, $\angle ABC=45°$.

**17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

**19** В течение $n$ дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли $n$ быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

**!** ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

## Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

### Профильный уровень

### Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом базового уровня сложности. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом повышенного уровня сложности и 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 .   | - | 0 | , | 8 |   Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

***Желаем успеха!***

**Справочные материалы**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$



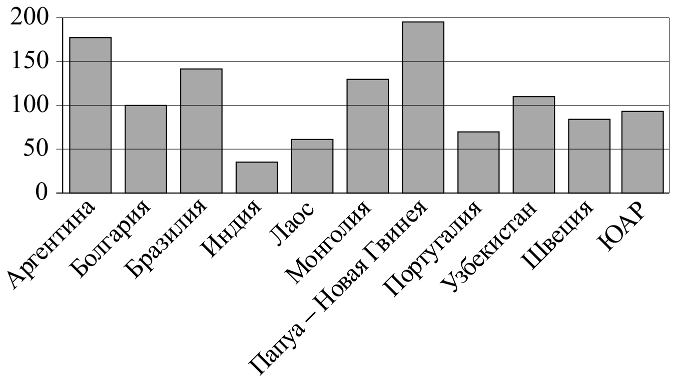
***Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.***

### Часть 1

**1** Шоколадка стоит 30 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 140 рублей в воскресенье?

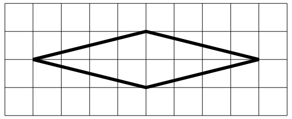
Ответ: ___________________________.

**2** На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа–Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимала Болгария?




Ответ: ___________________________.

**3** На клетчатой бумаге с размером клетки $1\times1$ изображён ромб. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

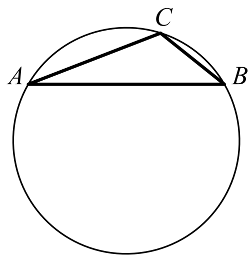
**4** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8℃, равна 0,91. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8℃ или выше.

Ответ: ___________________________.

**5** Найдите корень уравнения $\log_3(15-x)=\log_3 7$.

Ответ: ___________________________.

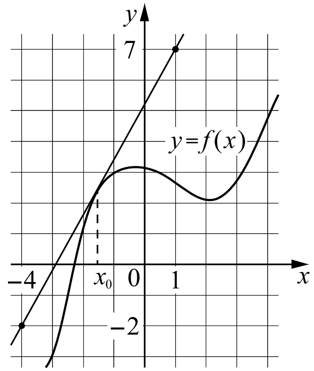
**6** В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ равна $2\sqrt{3}$, угол $C$ равен 120°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.




Ответ: ___________________________.

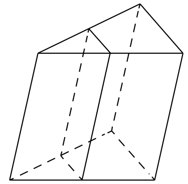


**7** На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




Ответ: ___________________________.

**8** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём этой призмы, если объём отсечённой треугольной призмы равен 7.



Ответ: ___________________________.

***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.***

## Часть 2

**9** Найдите значение выражения $\dfrac{\left(3\sqrt{8}\right)^2}{6}$.

Ответ: ___________________________.

**10** Два тела, массой $m = 6$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 9$ м/с под углом $2\alpha$ друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2\sin^2\alpha$, где $m$ — масса (в кг), $v$ — скорость (в м/с). Найдите, под каким углом $2\alpha$ должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 243 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

**11** Имеется два сплава. Первый сплав содержит 45% меди, второй — 20% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ___________________________.

**12** Найдите точку минимума функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 21x + 11$.

Ответ: ___________________________.

***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.***



***Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.***

**13** а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

**14** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB$ равна 6, а боковое ребро $SA$ равно 7. На рёбрах $CD$ и $SC$ отмечены точки $N$ и $K$ соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 2$. Плоскость $\alpha$ содержит прямую $KN$ и параллельна прямой $BC$.
а) Докажите, что плоскость $\alpha$ параллельна прямой $SA$.
б) Найдите угол между плоскостями $\alpha$ и $SBC$.

**15** Решите неравенство $\log_3\left((2-x)\left(x^2+5\right)\right) \ge \log_3\left(x^2-5x+6\right) + \log_3(4-x)$.

**16** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $120°$. Прямые, содержащие высоты $BM$ и $CN$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.
а) Докажите, что $AH = AO$.
б) Найдите площадь треугольника $AHO$, если $BC = 3$, $\angle ABC = 15°$.

**17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

**19** В течение $n$ дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли $n$ быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

## Ответы к заданиям

| № задания | Ответ |
|---|---|
| 1 | 28 |
| 2 | 4 |
| 3 | 12 |
| 4 | 0,17 |
| 5 | 6 |
| 6 | 3 |
| 7 | 1,4 |
| 8 | 20 |
| 9 | 15 |
| 10 | 60 |
| 11 | 30 |
| 12 | 144 |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**13** а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

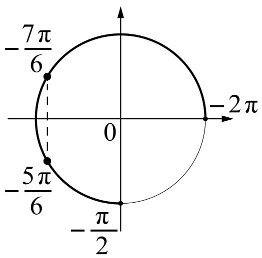
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)\left(\cos^2 x+1\right)=0.$$

Значит, или $\cos^2 x=-1$, что невозможно, или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.




Получим числа: $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

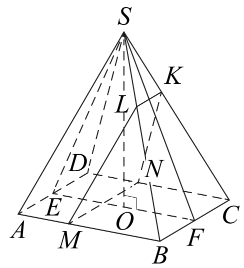


**14** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB$ равна 4, а боковое ребро $SA$ равно 7. На рёбрах $CD$ и $SC$ отмечены точки $N$ и $K$ соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:3$. Плоскость $\alpha$ содержит прямую $KN$ и параллельна прямой $BC$.

а) Докажите, что плоскость $\alpha$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите угол между плоскостями $\alpha$ и $SBC$.

Решение.




а) Пусть плоскость $\alpha$ пересекает прямые $SB$ и $AB$ в точках $L$ и $M$ соответственно. Поскольку плоскость $\alpha$ параллельна прямой $BC$, прямые $KL$, $BC$ и $MN$ параллельны. Следовательно,

$$SL:LB=SK:KC=DN:NC=AM:MB.$$

Таким образом, прямая $LM$, лежащая в плоскости $\alpha$, параллельна прямой $SA$, а значит, плоскость $\alpha$ параллельна прямой $SA$.

б) Поскольку плоскость $\alpha$ параллельна плоскости $SAD$, искомый угол равен углу между плоскостями $SAD$ и $SBC$. Пусть точки $E$ и $F$ — середины рёбер $AD$ и $BC$ соответственно. Тогда прямые $SF$ и $EF$ перпендикулярны прямой $BC$, а прямые $SE$ и $EF$ — прямой $AD$. Таким образом, плоскость $SEF$ перпендикулярна прямым $BC$ и $AD$, а также содержащим их плоскостям $SBC$ и $SAD$ соответственно.

Значит, угол между плоскостями $\alpha$ и $SBC$ равен углу $ESF$.

Высота $SO$ пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости $SEF$, откуда

$$EO=2,\ SE=\sqrt{SA^2-\frac{AD^2}{4}}=3\sqrt{5};$$

$$\sin\angle ESO=\frac{OE}{SE}=\frac{2\sqrt{5}}{15};\ \angle ESF=2\angle ESO=2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Ответ: б) $2\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**15** Решите неравенство $\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right)\ge\log_5\left(x^2-7x+12\right)+\log_5(5-x)$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_5\left((3-x)\left(x^2+2\right)\right)\ge\log_5\left((3-x)(4-x)\right)+\log_5(5-x);$$

$$\log_5(3-x)+\log_5\left(x^2+2\right)\ge\log_5(3-x)+\log_5(4-x)+\log_5(5-x).$$

Неравенство определено при $x<3$, поэтому при $x<3$ неравенство принимает вид:

$$x^2+2\ge(4-x)(5-x);\ x^2+2\ge x^2-9x+20;\ 9x\ge18,$$

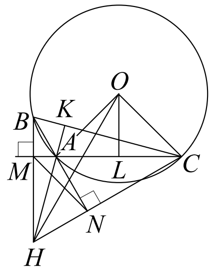
откуда $x\ge2$. Учитывая ограничение $x<3$, получаем: $2\le x<3$.
Ответ: $[2;3)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**16** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $120°$. Прямые, содержащие высоты $BM$ и $CN$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.
а) Докажите, что $AH=AO$.
б) Найдите площадь треугольника $AHO$, если $BC=\sqrt{15}$, $\angle ABC=45°$.



Решение.
а) Точки $M$ и $N$ лежат на окружности диаметром $BC$, поэтому $\angle AMN=\angle CMN=\angle ABC$. Значит, треугольники $AMN$ и $ABC$ подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{AN}{AC}=\cos\angle NAC=\cos60°=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника $AMN$, равен $\dfrac{AO}{2}$.




Точки $M$ и $N$ лежат на окружности диаметром $AH$, поэтому $AH=AO$.
б) Пусть прямые $AH$ и $BC$ пересекаются в точке $K$, а точка $L$ — середина стороны $AC$, тогда

$$\angle AKB=90°,\ \angle AOL=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot2\angle ABC=\angle ABC=45°.$$

Значит,

$$\angle OAL=90°-\angle AOL=45°,\ \angle BAK=90°-\angle ABC=45°;$$

$$\angle OAH=180°-\angle OAK=180°-\left(\angle BAC-\angle BAK-\angle OAL\right)=150°.$$

Площадь треугольника $AHO$ равна

$$\frac{AO\cdot AH\cdot\sin\angle OAH}{2}=\frac{AO^2\cdot\sin150°}{2}=\frac{BC^2\cdot\sin150°}{8\sin^2120°}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: б) $\dfrac{5}{4}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит планируется взять на $n$ лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5;\ \frac{5(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{5\cdot 2}{n};\ \frac{5}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$6;\ \frac{6(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{6\cdot 2}{n};\ \frac{6}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1+\frac{5}{n};\ \frac{(n-1)+5}{n};\ \ldots;\ \frac{2+5}{n};\ \frac{1+5}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$5+\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=5+\frac{n+1}{2}\ \text{(млн рублей)}.$$

Общая сумма выплат равна 7,5 млн рублей, поэтому $n=4$.
Ответ: 4.



| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат:<br>— неверный ответ из-за вычислительной ошибки;<br>— верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $9x^2-a^2=0$, для которых выполнено условие $x^2+8x+16-a^2\neq 0$.

Поскольку $9x^2-a^2=(3x-a)(3x+a)$, уравнение $9x^2-a^2=0$ задаёт на плоскости $Oxa$ пару прямых $l_1$ и $l_2$, заданных уравнениями $a=3x$ и $a=-3x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a=0$ и имеет два корня при $a\neq 0$.

Поскольку

$$x^2+8x+16-a^2=(x+4-a)(x+4+a),$$

уравнение $x^2+8x+16-a^2=0$ задаёт пару прямых $m_1$ и $m_2$, заданных уравнениями $a=x+4$ и $a=-x-4$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых $l_1$ и $m_1$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=3x,\\ a=x+4;\end{cases}\ \begin{cases}x+4=3x,\\ a=x+4;\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\ a=6.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_1$ и $m_1$ пересекаются в точке $(2;6)$.

Координаты точки пересечения прямых $l_1$ и $m_2$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=3x,\\ a=-x-4;\end{cases}\ \begin{cases}-x-4=3x,\\ a=-x-4;\end{cases}\ \begin{cases}x=-1,\\ a=-3.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_1$ и $m_2$ пересекаются в точке $(-1;-3)$.

Координаты точки пересечения прямых $l_2$ и $m_1$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-3x,\\ a=x+4;\end{cases}\ \begin{cases}x+4=-3x,\\ a=x+4;\end{cases}\ \begin{cases}x=-1,\\ a=3.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_2$ и $m_1$ пересекаются в точке $(-1;3)$.

Координаты точки пересечения прямых $l_2$ и $m_2$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-3x,\\ a=-x-4;\end{cases}\ \begin{cases}-x-4=-3x,\\ a=-x-4;\end{cases}\ \begin{cases}x=2,\\ a=-6.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_2$ и $m_2$ пересекаются в точке $(2;-6)$.



Следовательно, условие $x^2+8x+16-a^2\neq 0$ выполнено для корней уравнения $9x^2-a^2=0$ при всех $a$, кроме $a=-6$, $a=-3$, $a=3$ и $a=6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-6$; $-6<a<-3$; $-3<a<0$; $0<a<3$; $3<a<6$; $a>6$.

Ответ: $a<-6$; $-6<a<-3$; $-3<a<0$; $0<a<3$; $3<a<6$; $a>6$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точки $a=0$ | 3 |
| Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a=-6$, $a=0$ и/или $a=3$, или множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a=-3$, $a=0$ и/или $a=6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** В течение $n$ дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли $n$ быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.
а) Пусть в день с номером $k$ записано $k$ чисел 3 и $12-2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $12+k$. Таким образом, $n$ может быть равным 6.
б) Пусть $n=4$, в первый день на доску записали число 2 и двенадцать чисел 3, во второй день — двенадцать чисел 4, в третий день — шесть чисел 4 и пять чисел 5, а в четвёртый день — десять чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 38, во второй — 48, в третий — 49, а в четвёртый — 50. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $2\frac{12}{13}<3$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{1}{46}>4$.
в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 6 чисел. Значит, если $n>5$, то в шестой день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 6. Таким образом, $n \le 5$.
Если $n=5$, то в пятый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в четвёртый, третий и второй дни, не превосходят 9, 8 и 7 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 40.
Если $n=4$, то в четвёртый день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 14 и 13 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 48.
Если $n=3$, то в третий день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 19, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 45.
Если $n=2$, то во второй день на доску было записано не более пяти чисел, а их сумма не превосходит 25. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 31.



Если $n=1$, то сумма всех записанных чисел равна 6.
Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 48.
Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 48. Пусть $n=4$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 2, 2, 3, 3, 3; в третий — 3, 3, 4, 4; в четвёртый — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных в эти дни чисел соответственно равны 6, 13, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 48.
Ответ: а) да; б) да; в) 48.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— обоснованное решение пункта *а*;<br>— обоснованное решение пункта *б*;<br>— искомая оценка в пункте *в*;<br>— пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

## Ответы к заданиям

| № задания | Ответ |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 6 |
| 3 | 8 |
| 4 | 0,09 |
| 5 | 8 |
| 6 | 2 |
| 7 | 1,8 |
| 8 | 28 |
| 9 | 12 |
| 10 | 90 |
| 11 | 50 |
| 12 | 196 |

## Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

**13** а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x-1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

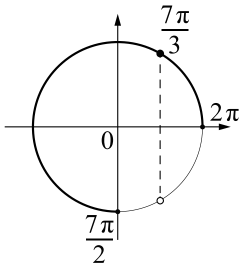
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$(2\cos x-1)\left(\cos^2 x+1\right)=0.$$

Значит, или $\cos^2 x=-1$, что невозможно, или $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.




Получим число $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{3}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

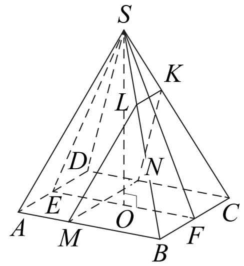


**14** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB$ равна 6, а боковое ребро $SA$ равно 7. На рёбрах $CD$ и $SC$ отмечены точки $N$ и $K$ соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:2$. Плоскость $\alpha$ содержит прямую $KN$ и параллельна прямой $BC$.

а) Докажите, что плоскость $\alpha$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите угол между плоскостями $\alpha$ и $SBC$.

Решение.




а) Пусть плоскость $\alpha$ пересекает прямые $SB$ и $AB$ в точках $L$ и $M$ соответственно. Поскольку плоскость $\alpha$ параллельна прямой $BC$, прямые $KL$, $BC$ и $MN$ параллельны. Следовательно,

$$SL:LB=SK:KC=DN:NC=AM:MB.$$

Таким образом, прямая $LM$, лежащая в плоскости $\alpha$, параллельна прямой $SA$, а значит, плоскость $\alpha$ параллельна прямой $SA$.

б) Поскольку плоскость $\alpha$ параллельна плоскости $SAD$, искомый угол равен углу между плоскостями $SAD$ и $SBC$. Пусть точки $E$ и $F$ — середины рёбер $AD$ и $BC$ соответственно. Тогда прямые $SF$ и $EF$ перпендикулярны прямой $BC$, а прямые $SE$ и $EF$ — прямой $AD$. Таким образом, плоскость $SEF$ перпендикулярна прямым $BC$ и $AD$, а также содержащим их плоскостям $SBC$ и $SAD$ соответственно.

Таким образом, угол между плоскостями $\alpha$ и $SBC$ равен углу $ESF$.

Высота $SO$ пирамиды $SABCD$ лежит в плоскости $SEF$, откуда

$$EO=3,\ SE=\sqrt{SA^2-\frac{AD^2}{4}}=2\sqrt{10};$$

$$\sin\angle ESO=\frac{OE}{SE}=\frac{3\sqrt{10}}{20};\ \angle ESF=2\angle ESO=2\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Ответ: б) $2\arcsin\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, возможно, с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**15** Решите неравенство $\log_3\left(\left(2-x\right)\left(x^2+5\right)\right)\ge\log_3\left(x^2-5x+6\right)+\log_3\left(4-x\right)$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3\left(\left(2-x\right)\left(x^2+5\right)\right)\ge\log_3\left(\left(2-x\right)\left(3-x\right)\right)+\log_3\left(4-x\right);$$

$$\log_3\left(2-x\right)+\log_3\left(x^2+5\right)\ge\log_3\left(2-x\right)+\log_3\left(3-x\right)+\log_3\left(4-x\right).$$

Неравенство определено при $x<2$, поэтому при $x<2$ неравенство принимает вид:

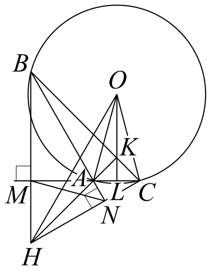
$$x^2+5\ge\left(3-x\right)\left(4-x\right);\ x^2+5\ge x^2-7x+12;\ 7x\ge7,$$

откуда $x\ge1$. Учитывая ограничение $x<2$, получаем: $1\le x<2$.
Ответ: $\left[1;2\right)$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**16** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $120°$. Прямые, содержащие высоты $BM$ и $CN$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $H$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$.
а) Докажите, что $AH=AO$.
б) Найдите площадь треугольника $AHO$, если $BC=3$, $\angle ABC=15°$.






Решение.
а) Точки $M$ и $N$ лежат на окружности диаметром $BC$, поэтому $\angle AMN=\angle CMN=\angle ABC$. Значит, треугольники $AMN$ и $ABC$ подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{AN}{AC}=\cos\angle NAC=\cos60°=\dfrac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника $AMN$, равен $\dfrac{AO}{2}$.

Точки $M$ и $N$ лежат на окружности диаметром $AH$, поэтому $AH=AO$.
б) Пусть прямые $AH$ и $BC$ пересекаются в точке $K$, а точка $L$ — середина стороны $AC$, тогда

$$\angle AKB=90°,\ \angle AOL=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot2\angle ABC=\angle ABC=15°.$$

Значит,

$$\angle OAL=90°-\angle AOL=75°,\ \angle BAK=90°-\angle ABC=75°;$$

$$\angle OAH=180°-\angle OAK=180°-\left(\angle BAK+\angle OAL-\angle BAC\right)=150°.$$

Площадь треугольника $AHO$ равна

$$\frac{AO\cdot AH\cdot\sin\angle OAH}{2}=\frac{AO^2\cdot\sin150°}{2}=\frac{BC^2\cdot\sin150°}{8\sin^2120°}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: б) $\dfrac{3}{4}$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**17** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 15 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит планируется взять на $n$ лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10;\ \frac{10(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{10\cdot 2}{n};\ \frac{10}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$11;\ \frac{11(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{11\cdot 2}{n};\ \frac{11}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1+\frac{10}{n};\ \frac{(n-1)+10}{n};\ \ldots;\ \frac{2+10}{n};\ \frac{1+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=10+\frac{n+1}{2} \text{ (млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 15 млн рублей, поэтому $n=9$.
Ответ: 9.



| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 3 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат:<br>— неверный ответ из-за вычислительной ошибки;<br>— верный ответ, но решение недостаточно обосновано | 2 |
| Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 3 |

**18** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2-a^2}{x^2+6x+9-a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $4x^2-a^2=0$, для которых выполнено условие $x^2+6x+9-a^2\neq 0$.

Поскольку $4x^2-a^2=(2x-a)(2x+a)$, уравнение $4x^2-a^2=0$ задаёт на плоскости $Oxa$ пару прямых $l_1$ и $l_2$, заданных уравнениями $a=2x$ и $a=-2x$ соответственно. Значит, это уравнение имеет один корень при $a=0$ и имеет два корня при $a\neq 0$.

Поскольку

$$x^2+6x+9-a^2=(x+3-a)(x+3+a),$$

уравнение $x^2+6x+9-a^2=0$ задаёт пару прямых $m_1$ и $m_2$, заданных уравнениями $a=x+3$ и $a=-x-3$ соответственно.

Координаты точки пересечения прямых $l_1$ и $m_1$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x+3=2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ a=6.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_1$ и $m_1$ пересекаются в точке $(3;6)$.

Координаты точки пересечения прямых $l_1$ и $m_2$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-x-3=2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ a=-2.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_1$ и $m_2$ пересекаются в точке $(-1;-2)$.

Координаты точки пересечения прямых $l_2$ и $m_1$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x+3=-2x,\\ a=x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ a=2.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_2$ и $m_1$ пересекаются в точке $(-1;2)$.

Координаты точки пересечения прямых $l_2$ и $m_2$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases}a=-2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-x-3=-2x,\\ a=-x-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ a=-6.\end{cases}$$

Значит, прямые $l_2$ и $m_2$ пересекаются в точке $(3;-6)$.

Следовательно, условие $x^2+6x+9-a^2\neq 0$ выполнено для корней уравнения $4x^2-a^2=0$ при всех $a$, кроме $a=-6$, $a=-2$, $a=2$ и $a=6$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<2$; $2<a<6$; $a>6$.

Ответ: $a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<2$; $2<a<6$; $a>6$.

| Содержание критерия | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точки $a=0$ | 3 |
| Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a=-6$, $a=0$ и/или $a=2$, или множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a=-2$, $a=0$ и/или $a=6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |

**19** В течение $n$ дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Может ли $n$ быть больше 6?

б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?

в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

Решение.

а) Пусть в день с номером $k$ записано $k$ чисел 3 и $14-2k$ чисел 1. Тогда сумма чисел в этот день равна $14+k$. Таким образом, $n$ может быть равным 7.

б) Пусть $n=4$, в первый день на доску записали число 1 и 32 числа 2, во второй день — 12 чисел 4 и 20 чисел 5, в третий день — 6 чисел 4 и 25 чисел 5, а в четвёртый день — 30 чисел 5. Тогда сумма чисел в первый день равна 65, во второй — 148, в третий — 149, а в четвёртый — 150. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $1\frac{32}{33}<2$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $4\frac{4}{63}>4$.

в) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 5 чисел. Значит, если $n>4$, то в пятый день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 5. Таким образом, $n \le 4$.

Если $n=4$, то в четвёртый день на доску было записано не более двух чисел, а их сумма не превосходит 10. Значит, суммы чисел, записанных в третий и второй дни, не превосходят 9 и 8 соответственно, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 32.

Если $n=3$, то в третий день на доску было записано не более трёх чисел, а их сумма не превосходит 15. Значит, сумма чисел, записанных во второй день, не превосходит 14, а сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 34.

Если $n=2$, то во второй день на доску было записано не более четырёх чисел, а их сумма не превосходит 20. Значит, сумма всех записанных чисел в этом случае не превосходит 25.

Если $n=1$, то сумма всех записанных чисел равна 5.
Таким образом, сумма всех записанных чисел не превосходит 34.

Покажем, что сумма всех записанных чисел могла равняться 34. Пусть $n=3$, и в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 3, 3, 4, 4; в третий — 5, 5, 5. Тогда суммы записанных за эти дни чисел соответственно



равны 5, 14 и 15, то есть числа удовлетворяют условиям задачи, а их сумма равна 34.
Ответ: а) да; б) да; в) 34.

| **Содержание критерия** | **Баллы** |
|---|---|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты | 4 |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 3 |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов | 2 |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— обоснованное решение пункта *а*;<br>— обоснованное решение пункта *б*;<br>— искомая оценка в пункте *в*;<br>— пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 4 |